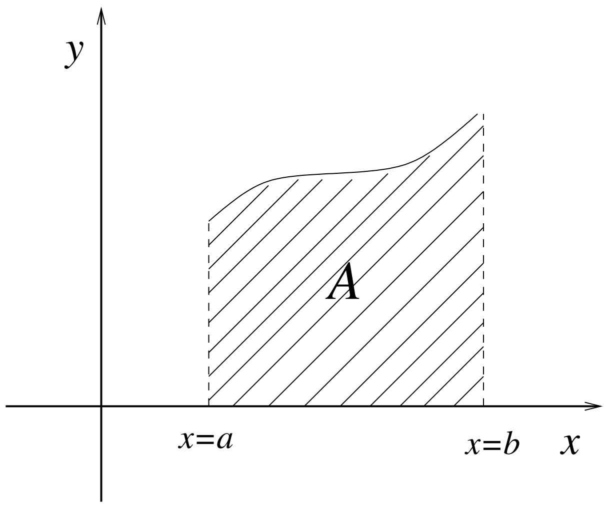
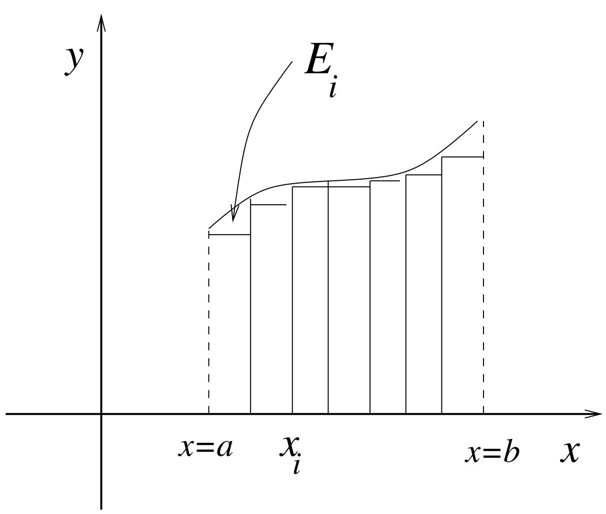
O integral definido como uma área

Seja $f(x)$ uma função contínua definida positiva no intervalo $[a, b]$. Suponhamos que queremos calcular a área entre a curva $y = f(x)$, o eixo dos x e as linhas $x = a$ e $x = b$.



Para determinar um valor aproximado da área A, subdivide-se o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos iguais tais que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = (b - a)/N$, com $i = 1, ..., N$ e $x_1 = a$, $x_N = b$. Cada rectângulo da figura abaixo tem área

$$A_i = \Delta x_i \times f(x_{i-1}) \ .$$



A área total A é igual à soma de todas as áreas do rectângulos e todos os erros E_i

$$A = \sum_{i=1}^{i=N} f(x_{i-1})\Delta x_i + \sum_{i=1}^{i=N} E_i \ .$$

Se agora aumentarmos o número de subintervalos, ou seja, se o Δx_i for mais pequeno, diminuímos cada erro E_i, de tal forma que, se tomarmos o limite em que o número de intervalos é infinito, cada subintervalo é infinitésimal, e o erro total é zero. A área real abaixo da curva $y = f(x)$ corresponde ao limite da soma de infinitos termos infinitesimais. A este limite dá-se o nome de *integral definido*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{i=N} f(x_i)\Delta x_i \ .$$

O símbolo $\int$ é um s alongado, representando uma soma. O símbolo dx representa uma variação infinitesimal de x.

O teorema fundamental do cálculo

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \ ,$$

ou seja

> *Se derivarmos o integral definido de uma função en relação ao limite superior de integração obtemos a própria função.*

Embora este resultado não se use muitas vezes, dele se deriva a regra para calcular integrais:

Seja $F(x)$ a anti-derivada da função $f(x)$, ou seja, a função cuja derivada dá $f(x)$. Atendendo ao teorema fundamental do cálculo podemos escrever

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c \ .$$

Para determinar a constante c, substitui-se x por a:

$$\int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + c; ,$$

resultando

$$F(a) = -c$$

e portanto

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \ .$$

Se fizermos $x = b$ obtém-se

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \ .$$

Para calcular o integral entre a e b da função $f(x)$ temos de

1. determinar a função cuja derivada é $f(x)$.

2. substituir no resultado, x pelos limites de integração e subtrair.

Também se usa a notação

$$\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \ .$$

Primitiva de uma função e integral definido

A primitiva ou integral indefinido de uma função $f(x)$, é igual à função que derivada dá $f(x)$. Como a derivada de uma constante é 0, temos

$$\int f(x')dx' = F(x) + c \ ,$$

em que c é uma constante e

$$\frac{d}{dx}(F(x) + c) = f(x) \ .$$

O integral definido da função $f(x)$, entre a e b, é igual à diferença entre os valores da primitiva calculada em b e em a,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

Algumas propriedades dos integrais definidos

Enunciamos algumas propriedades dos integrais sem as demonstrar

1. $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. Seja c uma constante
$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

3. $$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

4. Se $a \leq b \leq c$ então
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

5. Seja c uma constante
$$\int_a^b cdx = c\int_a^b dx = c(b - a) \ .$$

6. $$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \ ,$$
ou seja, trocando os limites de integração, obtemos o simétrico do integral de $f(x)$.

Cálculo de integrais definidos

Um integral definido é um número real. Quando se calcula o integral definido de $f(x)$, a pergunta que deve ser feita é

Qual é a função qual é ela que derivada dá $f(x)$?

Damos alguns exemplos de integrais definidos de funções com primitivas imediatas. Não daremos aqui métodos de primitivação que servem para calcular primitivas que não são imediatas.

- Calcular $\int_2^3 2x^2 dx$.

  Qual a função que derivada dá x^2?

$$\frac{d\left(x^3\right)}{dx} = 3x^2 ,$$

  Integrando ambos os membros da equação anterior e tendo em conta que a integração é o inverso da derivação

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d\left(x^3\right)}{dx} = \int 3x^2 dx \\
&x^3 = 3\int x^2 dx \\
&\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}
\end{aligned}$$

  e portanto

$$\int_2^3 2x^2 = 2\int_2^3 \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{2}{3}\left(3^3 - 2^3\right) = \frac{38}{3} .$$

- Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\sin\left(3x\right)\right) dx$.

  Qual a função que derivada dá $\sin\left(3x\right)$?

$$\frac{d}{dx}\cos\left(3x\right) = -\frac{d}{dx}(3x)\sin\left(3x\right) = -3\sin\left(3x\right) ,$$

  donde

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\sin\left(3x\right)\right) dx \\
&= -\frac{2}{3}\left[\cos\left(3x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2}{3}\left(\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right) - \cos 0\right) \\
&= -\frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

- Calcular $\int_{2}^{10} dx$.

  Qual é a função que derivada dá 1?

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

  logo,

$$\int_{-2}^{10} 1dx = [x]_{-2}^{10} = 10 - (-2) = 12\ .$$

- Determinar $\int_{t_1}^{t_2} e^{-at}dt$, em que a é uma constante

$$\frac{de^{-at}}{dt} = -ae^{-at}\ ,$$

  logo

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-at}dt = \left[\frac{-1}{a}e^{-at}\right]_{t_1}^{t_2} = -\frac{1}{a}\left(e^{-at_2} - e^{-at_1}\right)\ .$$

- Determinar $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2x^3}dx$.

  Qual a função que derivada dá $\frac{1}{x^3}$?

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}\ ,$$

  logo

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx = \int \frac{-2}{x^3}dx = -2\int \frac{1}{x^3}dx\ ,$$

  e portanto

$$\int \frac{1}{x^3}dx = \frac{-1}{2}\frac{1}{x^2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2x^3}dx = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x^3}dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2}\right)\ .$$

- Calcular $\int_{2}^{20} \frac{1}{x}dx$.

  A função que derivada dá $\frac{1}{x}$ é o logarítmo

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\ .$$

  donde

$$\int_{2}^{20} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_{2}^{20} = \ln 20 - \ln 2 = 2.30\,.$$